

解析学 II 解答例

2017.06.19

■ 複素数 α, β が $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$ をみたすとき, 不等式

$$\left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| < 1$$

が成り立つかどうか調べよ.

(解) $|z| = z\bar{z}$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right|^2 &= \frac{|1 - \bar{\alpha}\beta|^2 - |\alpha - \beta|^2}{|1 - \bar{\alpha}\beta|^2} = \frac{(1 - \bar{\alpha}\beta)(1 - \overline{\bar{\alpha}\beta}) - (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta})}{|1 - \bar{\alpha}\beta|^2} \\ &= \frac{(1 - \bar{\alpha}\beta)(1 - \alpha\bar{\beta}) - (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{|1 - \bar{\alpha}\beta|^2} = \frac{(1 - |\alpha|^2)(1 - |\beta|^2)}{|1 - \bar{\alpha}\beta|^2} > 0 \end{aligned}$$

より

$$\left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| < 1$$

が成り立つ. ■