解析学 I　解答例

2018.01.09

■　数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 > 0; \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2\,x_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定めるとき，次の問いに答えよ．

(0) すべての自然数 n に対して $x_n > 0$ であることを示せ．

(1) すべての自然数 $n \geq 2$ に対して $x_n \geq 1$ であることを示せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ であることを示せ．

（解） (0)： $n = 1$ のときには，明らかに $x_1 > 0$ である．また，$x_n > 0$ とすると，$x_n^2 + 1 > 0$ より

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2\,x_n} > 0$$

である．数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $x_n > 0$ である．

(1)： 相加平均・相乗平均の関係式より，すべての自然数 $n \geq 2$ に対して

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 1}{2\,x_{n-1}} \geq \frac{2\sqrt{x_{n-1}^2 \cdot 1}}{2\,x_{n-1}} = 1$$

が成り立つ．

(2)： 漸化式より

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n - 1}{2\,x_n} \cdot (x_n - 1), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

が得られ，すべての自然数 $n \geq 2$ に対して，(1) より

$$0 \leq \frac{x_n - 1}{2\,x_n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}$$

である．したがって，すべての自然数 $n \geq 3$ に対して

$$0 \leq x_n - 1 = \frac{x_{n-1} - 1}{2\,x_{n-1}} \cdot (x_{n-1} - 1) \leq \frac{x_{n-1} - 1}{2} \leq \frac{x_{n-2} - 1}{2^2} \leq \cdots \leq \frac{x_2 - 1}{2^{n-2}}$$

が成り立つ．はさみうちの原理と

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_2 - 1}{2^{n-2}} = 0$$

より $\lim_{n\to\infty}(x_n - 1) = 0$，つまり，$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ である．■