

解析学概論 解答例

2016.07.04

■ $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ とし, X 上の二項関係 $\overset{R}{\approx}$ を

$$(p_1, q_1) \overset{R}{\approx} (p_2, q_2) \quad \overset{\text{定義}}{\iff} \quad p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$$

により定義するとき, 二項関係 $\overset{R}{\approx}$ は X 上の同値関係であることを示せ. ここで, 自然数 n は整数 $[(n, 0)]$ と見なし, 演算 \cdot は整数 \mathbb{Z} における乗法である.

(解) (1) $p \cdot q = p \cdot q$ より $(p, q) \overset{R}{\approx} (p, q)$ である. (2) $(p_1, q_1) \overset{R}{\approx} (p_2, q_2)$ とすると, $\overset{R}{\approx}$ の定義により $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$ であり, 左辺と右辺を入れ替えて $p_2 \cdot q_1 = p_1 \cdot q_2$ が得られるので, $\overset{R}{\approx}$ の定義により $(p_2, q_2) \overset{R}{\approx} (p_1, q_1)$ となる. (3) $(p_1, q_1) \overset{R}{\approx} (p_2, q_2)$, $(p_2, q_2) \overset{R}{\approx} (p_3, q_3)$ とする. $\overset{R}{\approx}$ の定義により $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$, $p_2 \cdot q_3 = p_3 \cdot q_2$ が成り立つので,

$$(p_1 \cdot q_3) \cdot q_2 = (p_1 \cdot q_2) \cdot q_3 = (p_2 \cdot q_1) \cdot q_3 = (p_2 \cdot q_3) \cdot q_1 = (p_3 \cdot q_2) \cdot q_1 = (p_3 \cdot q_1) \cdot q_2$$

が得られる. $q_2 \in \mathbb{N}$ と簡約法則により $p_1 \cdot q_3 = p_3 \cdot q_1$ となり, $\overset{R}{\approx}$ の定義により $(p_1, q_1) \overset{R}{\approx} (p_3, q_3)$ が成り立つ. 以上から, 二項関係 $\overset{R}{\approx}$ は X 上の同値関係である. ■