

$X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ とし, X 上の二項関係 \sim^R を

$$(n_1, m_1) \sim^R (n_2, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

により定義するとき, 二項関係 \sim^R は X 上の同値関係であることを示せ. ここで, 演算 $+$ は自然数の集合 \mathbb{N}_0 における加法である.

(解) (1) \sim^R の定義と $n + m = n + m$ より $(n, m) \sim^R (n, m)$ が成り立つ. (2) $(n_1, m_1) \sim^R (n_2, m_2)$ であると仮定する. 定義より $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$ であるから, 左辺と右辺を入れ替えることにより $n_2 + m_1 = n_1 + m_2$ となる. 定義より $(n_2, m_2) \sim^R (n_1, m_1)$ が成り立つ. (3) $(n_1, m_1) \sim^R (n_2, m_2)$ かつ $(n_2, m_2) \sim^R (n_3, m_3)$ であると仮定する. 定義より $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$ かつ $n_2 + m_3 = n_3 + m_2$ であるから,

$$\begin{aligned} (n_1 + m_3) + m_2 &\stackrel{\text{結合} \cdot \text{交換}}{=} (n_1 + m_2) + m_3 \stackrel{\text{仮定}}{=} (n_2 + m_1) + m_3 \\ &\stackrel{\text{結合} \cdot \text{交換}}{=} (n_2 + m_3) + m_1 \stackrel{\text{仮定}}{=} (n_3 + m_2) + m_1 \stackrel{\text{結合} \cdot \text{交換}}{=} (n_3 + m_1) + m_2 \end{aligned}$$

が成り立ち, 簡約法則より $n_1 + m_3 = n_3 + m_1$ が得られる. 定義より $(n_1, m_1) \sim^R (n_3, m_3)$ である. 以上から, 二項関係 \sim^R は X 上の同値関係である. ■