

■  $X = \mathbb{N}$  における二項関係  $|$  を

$$a|b \iff b \text{ は } a \text{ で整除される}$$

により定義するとき、二項関係  $|$  は  $X$  における順序関係であることを示せ.

**(解)** (1)  $a = 1 \cdot a + 0$  より  $a$  は  $a$  で整除されるので、 $a|a$  である. (2)  $a|b$  かつ  $b|a$  とする. 二項関係  $|$  の定義より、ある自然数  $k_1, k_2$  が存在して、 $b = k_1 a$  および  $a = k_2 b$  が成り立つ.  $b = k_1 a = k_1 k_2 b$  と  $b \geq 1$  より  $k_1 k_2 = 1$  が得られる.  $k_1$  と  $k_2$  は自然数であるから、 $k_1 = k_2 = 1$  でなければならない. したがって、 $a = b$  である. (3)  $a|b$  かつ  $b|c$  とする. 二項関係  $|$  の定義より、ある自然数  $k_1, k_2$  が存在して、 $b = k_1 a$  および  $c = k_2 b$  が成り立つ.  $c = k_2 b = k_2 k_1 a$  と  $k_2 k_1 \in \mathbb{N}$  より  $c$  は  $a$  で整除される、つまり、 $a|c$  が成り立つ. 以上から、二項関係  $|$  は同値関係である. ■