

■ 次の写像が単射および全射であるかどうかを調べよ.

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

(2) $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$

(3) $h: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), h(x) = x^2$

(解) (1) $f(x) = x^2 = -1 \in \mathbb{R}$ をみたす $x \in \mathbb{R}$ は存在しないので, f は全射ではない. また, $f(-1) = 1 = f(1)$ より f は単射でもない.

(2) (1) と同様に, f は全射ではない. 非負の実数 x_1, x_2 が $f(x_1) = f(x_2)$ をみたすとすると,

$$0 = f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

より $x_1 = x_2$ が成り立つ. したがって, f は単射である.

(3) (2) と同様に, f は単射である. また, 任意の $y \geq 0$ に対して, $x = \sqrt{y}$ と定めると, $f(x) = (\sqrt{y})^2 = y$ となるので, f は全射でもある. ■