

■ 命題 $P(x)$, $Q(x)$ に対して, 次の命題が成り立つことを示せ.

$$(1) \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \implies \forall x P(x)$$

$$(2) (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \implies \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

(解) (1) $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ が真であるとする. このとき, すべての a に対して, $P(a) \wedge Q(a)$ が真であるから, $P(a)$ と $Q(a)$ はともに真である. つまり, すべての a に対して $P(a)$ が真であるから, $\forall x P(x)$ は真である. (2) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ が真であるとする. このとき, $\forall x P(x)$ が真, または, $\forall x Q(x)$ が真である.

(a) $\forall x P(x)$ が真であるときには, すべての a に対して, $P(a)$ が真であるから, $P(a) \vee Q(a)$ も真である. したがって, $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ は真である.

(b) $\forall x P(x)$ が偽であるときには, $\forall x Q(x)$ が真であるため, すべての a に対して, $Q(a)$ が真であるから, $P(a) \vee Q(a)$ も真である. したがって, $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ は真である.

(a) と (b) 何の場合にも $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ は真であるから, 示すべき命題が成り立つ. ■