

解析学 II 解答例

2016.05.23

■ 写像 $f: X \rightarrow Y$ と, Y の部分集合 A, B に対して

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

が成り立つことを示せ.

(解) (1) $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ であることと, (2) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$ であることを示せば良い.

(1) 任意に $x \in f^{-1}(A \cap B)$ をとる. 逆像の定義より $f(x) \in A \cap B$ であるから, $f(x) \in A$ かつ $f(x) \in B$ となり, $x \in f^{-1}(A)$ かつ $x \in f^{-1}(B)$, つまり, $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ が得られる. したがって, $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ である.

(2) 任意に $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ をとる. $x \in f^{-1}(A)$ かつ $x \in f^{-1}(B)$ であるから, 逆像の定義より $f(x) \in A$ かつ $f(x) \in B$ となり, $f(x) \in A \cap B$, つまり, $x \in f^{-1}(A \cap B)$ が得られる. したがって, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$ である. ■