

解析学 I 解答例

2017.01.30

■ 自然数 n, k は $n \geq 3, 1 \leq k \leq n$ をみたすものとする. n 次元列ベクトル $x = (x_j)$ および $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ を

$$x_j = \sin \frac{\pi k j}{n+1}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 2 & (|i-j|=0) \\ -1 & (|i-j|=1) \\ 0 & (|i-j| \geq 2) \end{cases}$$

により定義するとき, 適当に $\lambda \in \mathbb{C}$ を取ると $Ax = \lambda x$ が成り立つか調べよ.

(解) $x_0 = 0, x_{n+1} = 0$ とおくと, n 次元列ベクトル $Ax = \lambda x$ の第 j 要素は

$$\begin{aligned} \lambda \sin \frac{\pi k j}{n+1} &= -\sin \frac{\pi k (j-1)}{n+1} + 2 \sin \frac{\pi k j}{n+1} - \sin \frac{\pi k (j+1)}{n+1} \\ &= 2 \sin \frac{\pi k j}{n+1} \left(1 - \cos \frac{\pi k}{n+1}\right) = 4 \sin \frac{\pi k j}{n+1} \sin^2 \frac{\pi k}{2(n+1)} \end{aligned}$$

と表せるので,

$$\lambda = \lambda_k = 4 \sin^2 \frac{\pi k}{2(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

である. 上記の λ_k は A の固有値である. ■