

## 解析学 I 解答例

2017.01.23

■ 行列  $A$  を

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

により定義するとき,  $A^n$  ( $n \geq 3$ ) を求めよ.

(解) 行列  $B$  を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

により定義すると,  $EB = B = BE$ ,  $B^k = O$  ( $k \geq 3$ ) が成り立つことに注意したい.  $B^0 = E$ ,  $E^0 = E$  とおくと, 二項定理より

$$\begin{aligned} A^n &= (\lambda E + B)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (\lambda E)^{n-k} B^k \\ &= {}_n C_0 \lambda^n E + {}_n C_1 \lambda^{n-1} B + {}_n C_2 \lambda^{n-2} B^2 = \begin{pmatrix} {}_n C_0 \lambda^n & {}_n C_1 \lambda^{n-1} & {}_n C_2 \lambda^{n-2} \\ 0 & {}_n C_0 \lambda^n & {}_n C_1 \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & {}_n C_0 \lambda^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. ■