

解析学 I 解答例

2017.01.23

■ 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

により定義するとき, A^n ($n \geq 3$) を求めよ.

(解) 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

により定義すると, $EB = B = BE$, $B^k = O$ ($k \geq 3$) が成り立つことに注意したい. $B^0 = E$, $E^0 = E$ とおくと, 二項定理より

$$\begin{aligned} A^n &= (\lambda E + B)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (\lambda E)^{n-k} B^k \\ &= {}_n C_0 \lambda^n E + {}_n C_1 \lambda^{n-1} B + {}_n C_2 \lambda^{n-2} B^2 = \begin{pmatrix} {}_n C_0 \lambda^n & {}_n C_1 \lambda^{n-1} & {}_n C_2 \lambda^{n-2} \\ 0 & {}_n C_0 \lambda^n & {}_n C_1 \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & {}_n C_0 \lambda^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. ■