

解析学 I 解答例

2015.11.30

n を自然数とする．正数 a, s が $s^n < a$ をみたすとき， $(s + \varepsilon)^n < a$ となる正数 ε を求めよ．

(解) $0 < \varepsilon < 1$ をみたす ε を求める．このとき，すべての自然数 k に対して $\varepsilon^k \leq \varepsilon$ であることに注意したい．二項定理より

$$\begin{aligned}(s + \varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k s^{n-k} \varepsilon^k = s^n + \sum_{k=1}^n {}_n C_k s^{n-k} \varepsilon^k \\ &\leq s^n + \varepsilon \sum_{k=1}^n {}_n C_k s^{n-k} \leq s^n + \varepsilon \sum_{k=0}^n {}_n C_k s^{n-k} \leq s^n + \varepsilon (s + 1)^n\end{aligned}$$

が得られるので，

$$s^n + \varepsilon (s + 1)^n < a \text{ かつ } 1 < \varepsilon < 1, \quad \text{つまり, } 0 < \varepsilon < \min \left\{ 1, \frac{a - s^n}{(s + 1)^n} \right\}$$

となる ε であればよい．■