

解析学 I 解答例

2015.10.26

デ・デキントの意味で定義された実数 $x = (A, B)$, $y = (C, D)$ に対して, 二項関係 \leq を

$$x \leq y \iff A \subset C$$

により定義すると, 二項関係 \leq は順序関係である (証明しなくても良い). このとき, 任意の実数 x, y に対して

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$

の何れか一つが成り立つことを示せ.

(解) $x = (A, B)$, $y = (C, D)$ とする. 定義より, $x \leq y$ のときには $x < y$ または $x = y$ の何れか一方が成り立つので, $x \not\leq y$ のとき $y < x$ であることを示せばよい. 以下では, $x \not\leq y$ の場合を考える. 二項関係 \leq の定義より $\neg(A \subset C)$ が成り立つので, $a \in A$ かつ $a \notin C$ をみたす $a \in \mathbb{Q}$ が存在する. 任意に $r \in C$ をとる. (D1) より $a \in D$ であるから, (D2) より $r < a$ である. $r \notin A$ と仮定すると, (D1) より $r \in B$ であり, (D2) と $a \in A$ より $a < r$ が得られ矛盾である. したがって, $r \in A$ である. $C \subset A$ が成り立つので, 二項関係 \leq の定義より $y \leq x$ である. $a \in A$ かつ $a \notin C$ より $C \neq A$ であるから $y < x$ が成り立つ. ■