解析学 I　解答例

2015.10.13

■　次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，n と $n+1$ は互いに素であることを示せ．

(2) 自然数 a，b（$2 \le a < b$）に対して，次は同値であることを示せ．

(a) $\gcd(a,b)=1$ である．

(b) ある整数 x，y が存在して $a\,x+b\,y=1$ が成り立つ．

（解） (1) 関係式 $(n+1)\cdot 1+n\cdot(-1)=1$ と (2) より，n と $n+1$ は互いに素である．

(2) (a) $\Longrightarrow$ (b)： 自然数 k に対して，$k\,b$ を a で割ったときの商を q_k（$q_k \in \mathbb{N}$），余りを r_k（$0 \le r_k < a$）とすると，$k\,b=q_k\,a+r_k$ と表せる．ある自然数 k（$k<a$）に対して $r_k=0$ であると仮定すると，$k\,b=q_k\,a$ より k は a の倍数となり，$1 \le k < a$ に矛盾する．したがって，$r_k \ge 1$（$1 \le k < a$）である．ある自然数 k，ℓ（$k<\ell<a$）に対して $r_k=r_\ell$ と仮定すると，

$$0=r_\ell-r_k=(\ell\,b-q_\ell\,a)-(k\,b-q_k\,a)=(\ell-k)\,b-(q_\ell-q_k)\,a$$

より，$\ell-k$ は a の倍数となり，$1 \le \ell-k < a$ に矛盾する．したがって，r_1，r_2，$\cdots$，r_{a-1} はすべて異なる．$1 \le r_k < a$（$1 \le k < a$）より，ある自然数 m（$m<a$）に対して $r_m=1$ がみたされなければならない．したがって，$a\cdot(-q_m)+b\cdot m=1$ が得られる．

(b) $\Longrightarrow$ (a)： $c=\gcd(a,b)\ge 1$ とおくと，$a=c\,\hat{a}$，$b=c\,\hat{b}$ をみたす自然数 $\hat{a}$，$\hat{b}$ が取れる．

$$1=a\,x+b\,y=c\,(\hat{a}\,x+\hat{b}\,y), \qquad \hat{a}\,x+\hat{b}\,y \in \mathbb{Z}$$

より 1 は c で整除されなければならないので，$c=1$ である．■