解析学概論　解答例

2014.05.12

■　写像 $f : X \to Y$ について，次の問いに答えよ．

(1) X の任意の部分集合 A_1，A_2 に対して $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ が成り立つ例を示せ．

(2) f が単射ならば，X の任意の部分集合 A_1，A_2 に対して $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ が成り立つことを示せ．

(解) (1) $X \subsetneqq Y$ とし，$f(x) = x$ とする．[*1]このとき，すべての $A \subset X$ に対して $f(A) = A$ であるから，X の任意の部分集合 A_1，A_2 に対して

$$f(A_1 \cap A_2) = A_1 \cap A_2 = f(A_1) \cap f(A_2)$$

が成り立つ．(2) X の任意の部分集合 A_1，A_2 に対して，$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ は示されているので，$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ を示せばよい．$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ を任意に取る．$y \in f(A_1)$ かつ $y \in f(A_2)$ であるから，ある $x_1 \in A_1$，$x_2 \in A_2$ が存在して，$f(x_1) = y = f(x_2)$ が成り立つ．f は単射であるから，$x_1 = x_2$ が成り立ち，$x_1 \in A_1 \cap A_2$ より $y = f(x_1) \in f(A_1 \cap A_2)$ である．したがって，$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ が成り立つ．■

[*1] f は単射であるが，全射ではないことに注意したい．