

■ 命題関数 $P(x)$ と命題 Q に対して、命題

$$[(\forall x P(x)) \vee Q] \equiv [\forall x (P(x) \vee Q)]$$

が成り立つことを示せ.

(解) (\implies) $(\forall x P(x)) \vee Q$ が真であると仮定する. このとき, $\forall x P(x)$ が真, または, Q が真である. (i) Q が真であるとすると, すべての a に対して $P(a) \vee Q$ は真であるから, $\forall x (P(x) \vee Q)$ は真である. (ii) Q が偽であるとすると, $\forall x P(x)$ が真である. すべての a に対して, $P(a)$ が真であるから, $P(a) \vee Q$ は真である. つまり, $\forall x (P(x) \vee Q)$ は真である. 以上より, (i) および (ii) の何れの場合にも $\forall x (P(x) \vee Q)$ は真であるから,

$$[(\forall x P(x)) \vee Q] \implies [\forall x (P(x) \vee Q)]$$

が成り立つ.

(\impliedby) $\forall x (P(x) \vee Q)$ が真であると仮定する. このとき, すべての a に対して $P(a) \vee Q$ が真である. (i) Q が真のとき, 明らかに $(\forall x P(x)) \vee Q$ は真である. (ii) Q が偽であるとする. すべての a に対して, $P(a) \vee Q$ が真であり, Q が偽であるから, $P(a)$ は真である, つまり, $\forall x P(x)$ が真である. したがって, $(\forall x P(x)) \vee Q$ は真である. 以上より, (i) および (ii) の何れの場合にも $(\forall x P(x)) \vee Q$ は真であるから,

$$[\forall x (P(x) \vee Q)] \implies [(\forall x P(x)) \vee Q]$$

が成り立つ. ■