

解析学 II 解答例

2014.05.07

■ n を自然数, x, y を実数とするとき, 次の命題が真の場合には証明を, 偽の場合には反例を示せ.

(1) $|x|^n + |y|^n \leq 1$ ならば $|x|^{n+1} + |y|^{n+1} \leq 1$ である.

(2) $x^n + y^n \leq 1$ ならば $x^{n+1} + y^{n+1} \leq 1$ である.

(解) (1) 真である. $|x|^n + |y|^n \leq 1$ より $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ であるから, $|x|^{n+1} \leq |x|^n, |y|^{n+1} \leq |y|^n$ が成り立ち,

$$|x|^{n+1} + |y|^{n+1} \leq |x|^n + |y|^n \leq 1$$

となる.

(2) (a) n が偶数のとき, 真である.

$$|x|^n + |y|^n = x^n + y^n \leq 1$$

より $x \leq |x| \leq 1, y \leq |y| \leq 1$ が得られ, $x \cdot |x|^n \leq |x|^n, y \cdot |y|^n \leq |y|^n$ が成り立ち,

$$x^{n+1} + y^{n+1} = x \cdot |x|^n + y \cdot |y|^n \leq |x|^n + |y|^n \leq 1$$

となる. (b) n が奇数のとき, 偽である. 自然数 k を用いて $n = 2k - 1$ と表せるので, $x = -1, y = -1$ は

$$x^n + y^n = 2(-1)^{2k-1} = -2 \leq 1, \quad x^{n+1} + y^{n+1} = 2(-1)^{2k} = 2 > 1$$

をみたし, 反例である. ■