

解析学 I 解答例

2014.12.08

■ 集合 A は \mathbb{R} の空でない上に有界な部分集合とする. \mathbb{R} における A の上界の集まりを \hat{B} とし, $\hat{A} = \mathbb{R} \setminus \hat{B}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 「 a は A の上界ではない」の定義を示せ.
- (2) \hat{A} には最大元が存在しないことを示せ.

(解) (1) 命題「 $\forall x \in A (x \leq a)$ 」がみたされるとき, a は A の上界であるから, 否定を取るにより「 $\exists x \in A (x > a)$ 」である.

(2) $a = \min \hat{A}$ が存在すると仮定する. $a \in \hat{A}$ より, a は A の上界ではないので, ある $x \in A$ が取れて, $a < x$ が成り立つ. $y = (a+x)/2$ とおくと, $a < y < x$ かつ $x \in A$ であるから, y は A の上界ではないので, $a < y \in \hat{A}$ である. これは a が \hat{A} の最大元であることに反する. したがって, \hat{A} には最大元が存在しない. ■