

## 解析学 I 解答例

2014.12.08

■ 集合  $A$  は  $\mathbb{R}$  の空でない上に有界な部分集合とする.  $\mathbb{R}$  における  $A$  の上界の集まりを  $\hat{B}$  とし,  $\hat{A} = \mathbb{R} \setminus \hat{B}$  とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 「 $a$  は  $A$  の上界ではない」の定義を示せ.
- (2)  $\hat{A}$  には最大元が存在しないことを示せ.

**(解)** (1) 命題「 $\forall x \in A (x \leq a)$ 」がみたされるとき,  $a$  は  $A$  の上界であるから, 否定を取るにより「 $\exists x \in A (x > a)$ 」である.

(2)  $a = \min \hat{A}$  が存在すると仮定する.  $a \in \hat{A}$  より,  $a$  は  $A$  の上界ではないので, ある  $x \in A$  が取れて,  $a < x$  が成り立つ.  $y = (a+x)/2$  とおくと,  $a < y < x$  かつ  $x \in A$  であるから,  $y$  は  $A$  の上界ではないので,  $a < y \in \hat{A}$  である. これは  $a$  が  $\hat{A}$  の最大元であることに反する. したがって,  $\hat{A}$  には最大元が存在しない. ■