

## 解析学 I 解答例

2014.11.26

■ 実数  $x = (A, B)$ ,  $y = (C, D)$  に対して, 二項関係  $\preceq$  を

$$x \preceq y \iff A \subset C$$

により定義するとき, 二項関係  $\preceq$  は  $\mathbb{R}$  における順序関係であることを示せ. 二項関係  $\preceq$  は  $\mathbb{Q}$  における順序関係  $\leq$  の拡張になっていることを確認せよ.

**(解)** (i) 実数  $x = (A, B)$  に対して,  $A \subset A$  であるから,  $x = (A, B) \preceq (A, B) = x$  が成り立つ. (ii) 実数  $x = (A, B)$ ,  $y = (C, D)$  が  $x \preceq y$  かつ  $y \preceq x$  をみたすとする. 二項関係  $\preceq$  の定義より  $A \subset C$  かつ  $C \subset A$  であるから, 集合の相等により  $A = C$  が得られる.  $B = \mathbb{Q} \setminus A = \mathbb{Q} \setminus C = D$  より  $x = (A, B) = (C, D) = y$  である. (iii) 実数  $x = (A, B)$ ,  $y = (C, D)$ ,  $z = (E, F)$  が  $x \preceq y$  かつ  $y \preceq z$  をみたすとする. 二項関係  $\preceq$  の定義より  $A \subset C$  かつ  $C \subset E$  であるから, 包含関係の推移法則により  $A \subset E$  が得られる. 二項関係  $\preceq$  の定義より  $x = (A, B) \preceq (E, F) = z$  となる. 以上から, 二項関係  $\preceq$  は  $\mathbb{R}$  における順序関係である. また, 任意の  $q_1, q_2$  に対して

$$q_1 \leq q_2 \iff \mathbb{Q}_{q_2} \subset \mathbb{Q}_{q_1} \iff (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{q_1}) \subset (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{q_2}) \iff (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{q_1}, \mathbb{Q}_{q_1}) \preceq (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{q_2}, \mathbb{Q}_{q_2})$$

が成り立つので, 二項関係  $\preceq$  は  $\mathbb{Q}$  における順序関係  $\leq$  の拡張になっている. ■