

■ $(-1) \cdot (-1) = 1$ を示せ.

(解) -1 は加法における 1 の逆元であることに注意したい. 0 は加法における単位元であるから, $0 = 0 + 0$ が成り立つ. 両辺に -1 を掛け, **分配法則**を適用すると,

$$0 \cdot (-1) = (0 + 0) \cdot (-1) = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)$$

となり, 加法における $0 \cdot (-1)$ の逆元 $-(0 \cdot (-1))$ を両辺に加える (両辺から $0 \cdot (-1)$ を引く) と, **結合法則**より

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1) = (0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)) - 0 \cdot (-1) \\ &= 0 \cdot (-1) + (0 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1)) = 0 \cdot (-1) + 0 = 0 \cdot (-1) \end{aligned}$$

が成り立つ. $1 + (-1) = 0$ の両辺に -1 を掛けると, **分配法則**より

$$0 = 0 \cdot (-1) = (1 + (-1)) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = (-1) + (-1) \cdot (-1)$$

となる. 1 を両辺に加え, **結合法則**を用いると

$$1 = 1 + 0 = 1 + ((-1) + (-1) \cdot (-1)) = (1 + (-1)) + (-1) \cdot (-1) = 0 + (-1) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1)$$

が得られる. ■