

■ \mathbb{Z} 上の二項関係 \sim を

$$a \sim b \iff a - b \text{ は } 3 \text{ で整除される}$$

により定義する. このとき, \sim は \mathbb{Z} 上の同値関係であることが確認できる. a を代表元とする \sim に関する同値類を $[a]$ と表し, 演算 $*$ を

$$[a] * [b] = [ab]$$

により定義するとき, 演算 $*$ は代表元の取り方に依存せずうまく定義されていることを示せ.

(解) $[a] = [a']$ かつ $[b] = [b']$ とすると, 定義より, ある整数 k, ℓ が存在して $a - a' = 3k, b - b' = 3\ell$ が成り立つ.

$$ab - a'b' = (a' + 3k)(b' + 3\ell) - a'b' = 3(a'\ell + b'k + 3k\ell)$$

より, $ab \sim a'b'$, つまり, $[ab] = [a'b']$ である. したがって, 演算 $*$ は代表元の取り方に依存せずうまく定義されている. ■