解析学概論　解答例

2012.05.07

■　$X = \mathbb{R}^2$ 上の二項関係 $\sim$ を

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 - a_2 = b_1 - b_2$$

により定義するとき，$\sim$ は X 上の同値関係であることを示せ．また，$\sim$ は何を意味するか述べよ．

（解） (1) $a_1 - a_1 = 0 = b_1 - b_1$ と定義より $(a_1, b_1) \sim (a_1, b_1)$ である．(2) $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ とする．定義より $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$ であるから，この両辺に -1 を掛けることにより $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$ が得られる．定義より $(a_2, b_2) \sim (a_1, b_1)$ である．(3) $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ かつ $(a_2, b_2) \sim (a_3, b_3)$ とする．定義より $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$ かつ $a_2 - a_3 = b_2 - b_3$ である．

$$a_1 - a_3 = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = b_1 - b_3$$

と定義より $(a_1, b_1) \sim (a_3, b_3)$ が成り立つ．以上から，$\sim$ は X 上の同値関係である．また，

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 - a_2 = b_1 - b_2 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 - b_1 = a_2 - b_2$$

であるから，$(a, b) \in X$ を b を始点，a を終点とする 1 次元ベクトルと考えると，二項関係 $\sim$ は 1 次元ベクトルの相等に対応している．■