

■ A, B, C を集合とすると、次が成り立つことを示せ。

(1) $A \subset A$

(2) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \implies A \subset C$

(解) (1) 次の真理表から、 $P \implies P$ が成り立つことに注意したい。任意の x に対して $x \in A \implies x \in A$ 成り立つので、定義より $A \subset A$ となる。

P	$P \implies P$
T	T
F	T

(2) 前提 $(A \subset B) \wedge (B \subset C)$ が真であると仮定する。定義より

$$\forall x (x \in A \implies x \in B), \quad \forall x (x \in B \implies x \in C)$$

が成り立つ。任意に x をとる。 $x \in A$ が真ならば、上の前半により $x \in B$ が真であり、さらに上の後半により $x \in C$ が真である。したがって、命題

$$\forall x (x \in A \implies x \in C)$$

が成り立つので、定義より $A \subset C$ が得られる。 ■