

## 解析学概論 解答例

2012.07.23

問1  $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  上の二項関係  $\approx$  を

$$(q_1, p_1) \approx (q_2, p_2) \iff p_1 q_2 = p_2 q_1$$

により定義するとき、二項関係  $\approx$  は  $X$  上の同値関係であることを示せ。また、同値関係  $\approx$  に関する  $(q, p)$  を代表元とする同値類を  $\langle (q, p) \rangle$  と表し、 $\mathbb{Q} = X/\approx$  上の和  $+$  を

$$\langle (q_1, p_1) \rangle + \langle (q_2, p_2) \rangle = \langle (q_1 p_2 + q_2 p_1, p_1 p_2) \rangle$$

により定義するとき、和  $+$  は代表元の取り方によらずにうまく定義できていることを示せ。

(解)  $\approx$  が同値関係であること (i) 定義より明らかに  $(q, p) \approx (q, p)$  である。(ii)  $(q_1, p_1) \approx (q_2, p_2)$  とする。定義より、 $p_1 q_2 = p_2 q_1$  であるから、 $(q_2, p_2) \approx (q_1, p_1)$  が成り立つ。(iii)  $(q_1, p_1) \approx (q_2, p_2)$  かつ  $(q_2, p_2) \approx (q_3, p_3)$  とする。定義より  $p_1 q_2 = p_2 q_1$  かつ  $p_2 q_3 = p_3 q_2$  である。ここで、 $p_2 \neq 0$  であることに注意したい。簡約法則と

$$(p_1 q_3) p_2 = (p_2 q_3) p_1 = (p_3 q_2) p_1 = (p_1 q_2) p_3 = (p_2 q_1) p_3 = (p_3 q_1) p_2$$

より  $p_1 q_3 = p_3 q_1$  が得られる。定義より  $(q_1, p_1) \approx (q_3, p_3)$  が成り立つ。以上より、二項関係  $\approx$  は  $X$  上の同値関係である。

代表元の取り方に依存しないこと  $\langle (q_1, p_1) \rangle = \langle (q'_1, p'_1) \rangle$ ,  $\langle (q_2, p_2) \rangle = \langle (q'_2, p'_2) \rangle$  とする。同値関係  $\approx$  の定義より  $p_1 q'_1 = p'_1 q_1$ ,  $p_2 q'_2 = p'_2 q_2$  となるので、

$$\begin{aligned} (p_1 p_2) (q'_1 p'_2 + q'_2 p'_1) &= (p_1 q'_1) (p_2 p'_2) + (p_1 p'_1) (p_2 q'_2) \\ &= (p'_1 q_1) (p_2 p'_2) + (p_1 p'_1) (p'_2 q_2) = (p'_1 p'_2) (q_1 p_2 + q_2 p_1) \end{aligned}$$

と同値関係  $\approx$  の定義より

$$\langle (q_1 p_2 + q_2 p_1, p_1 p_2) \rangle = \langle (q'_1 p'_2 + q'_2 p'_1, p'_1 p'_2) \rangle$$

が得られる。したがって、和  $+$  は代表元の取り方によらずにうまく定義できている。 ■