

解析学概論 解答例

2012.06.11

問1 すべての自然数 n, m, k に対して $\Psi_{\Psi_n(m)}(k) = \Psi_n(\Psi_m(k))$ が成り立つことを示せ.

(解) 自然数 n, m を任意に取り固定し, k に関する数学的帰納法で証明する. (i)

$$\Psi_{\Psi_n(m)}(0) \stackrel{\text{定義 (i)}}{=} 0 \stackrel{\text{定義 (i)}}{=} \Psi_n(0) \stackrel{\text{定義 (i)}}{=} \Psi_n(\Psi_m(0))$$

より $k = 0$ のとき成り立つ. (ii) k のとき成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} \Psi_{\Psi_n(m)}(S(k)) &\stackrel{\text{定義 (ii)}}{=} \Psi_{\Psi_n(m)}(k) + \Psi_n(m) \stackrel{\text{仮定}}{=} \Psi_n(\Psi_m(k)) + \Psi_n(m) \\ &\stackrel{\text{分配法則}}{=} \Psi_n(\Psi_m(k) + m) \stackrel{\text{定義 (ii)}}{=} \Psi_n(\Psi_m(S(k))) \end{aligned}$$

より, $S(k)$ のときも成り立つ. 数学的帰納法により, すべての自然数 n, m, k に対して $\Psi_{\Psi_n(m)}(k) = \Psi_n(\Psi_m(k))$ が成り立つ. ■