

解析学概論 解答例

2012.05.28

問1 すべての自然数 n に対して、二項係数 ${}_n C_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$) は自然数であることを示せ.

(解) 「二項係数 ${}_n C_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$) は自然数である」を $P(n)$ と表す. (i) ${}_1 C_0 = 1, {}_1 C_1 = 1$ より, $P(1)$ が成り立つ. (ii) $P(\ell)$ が成り立つと仮定する. $k = 1, 2, \dots, \ell$ に対して,

$$\begin{aligned} {}_{\ell+1} C_k &= \frac{(\ell+1)!}{k!(\ell+1-k)!} = \frac{\{(\ell+1-k)+k\} \ell!}{k!(\ell+1-k)!} \\ &= \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!} + \frac{\ell!}{(k-1)! \{\ell-(k-1)\}!} = {}_{\ell} C_k + {}_{\ell} C_{k-1} \end{aligned}$$

より, ${}_{\ell+1} C_k$ は自然数である. 二項係数の定義より ${}_{\ell+1} C_0 = 1, {}_{\ell+1} C_{\ell+1} = 1$ であるから, $P(\ell+1)$ が成り立つ. 数学的帰納法により, すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つ. ■