解析学概論　解答例

2012.05.21

問 1　集合 $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{\, \mathbf{0} \,\}$ 上の二項関係 $\lhd$ を

$$(x_1, y_1) \lhd (x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists r \geq 1 \ (x_1 = r\, x_2 \wedge y_1 = r\, y_2)$$

により定義するとき，$\lhd$ は X 上の（半）順序関係であることを示せ．また，$\lhd$ は全順序ではないことも示せ．

（解） (O1) 任意の $(x, y) \in X$ に対して，$x = 1 \cdot x$，$y = 1 \cdot y$ より $(x, y) \lhd (x, y)$ が成り立つ．(O2) $(x_1, y_1) \lhd (x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2) \lhd (x_1, y_1)$ とする．定義より

$$\exists r_1 \geq 1 \ (x_1 = r_1\, x_2 \wedge y_1 = r_1\, y_2), \qquad \exists r_2 \geq 1 \ (x_2 = r_2\, x_1 \wedge y_2 = r_2\, y_1)$$

が成り立つので，$x_1 = r_1\, r_2\, x_1, y_1 = r_1\, r_2\, y_1$ が得られる．$(x_1, y_1) \neq \mathbf{0}$ より $r_1\, r_2 = 1$ であるから，$r_1 = r_2 = 1$ となる．したがって，$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ である．(O3) $(x_1, y_1) \lhd (x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2) \lhd (x_3, y_3)$ とする．定義より

$$\exists r_1 \geq 1 \ (x_1 = r_1\, x_2 \wedge y_1 = r_1\, y_2), \qquad \exists r_2 \geq 1 \ (x_2 = r_2\, x_3 \wedge y_2 = r_2\, y_3)$$

が成り立つので，$r_1\, r_2 \geq 1$，$x_1 = r_1\, r_2\, x_3$，$y_1 = r_1\, r_2\, y_3$ が得られる．したがって，$(x_1, y_1) \lhd (x_3, y_3)$ である．以上から，$\lhd$ は X 上の（半）順序関係である．

$(1, 0)$ と $(0, 1)$ はともに X の要素であるが，定義より $(1, 0) \lhd (0, 1)$ ではなく，$(0, 1) \lhd (1, 0)$ でもない．したがって，$\lhd$ は全順序ではない．■