

解析学概論 解答例

2012.04.16

問1 限定記号を用いて、命題「すべての x に対して、 $x > 0$ ならば $\sin x > 0$ である」を表せ。また、命題が偽であることと、否定命題を示せ。

(解) 与えられた命題は $\forall x (x > 0 \rightarrow \sin x > 0)$ と表せる。また、 $x = \pi$ のとき $\sin x = 0$ となり、与えられた命題は偽である。さらに、否定命題は

$$\neg(\forall x (x > 0 \rightarrow \sin x > 0)) \equiv \exists x \neg(x > 0 \rightarrow \sin x > 0) \equiv \exists x (x > 0 \wedge \sin x \leq 0)$$

である。■

問2 写像 $f: X \rightarrow Y$ と X の部分集合 A について、 $A \subset f^{-1}(f(A))$ が成り立つことを示せ。また、等号が成り立たない例があれば示せ。

(解) 任意に $x \in A$ に対して、 $f(x) \in f(A)$ と逆像の定義より、 $x \in f^{-1}(f(A))$ である。したがって、 $A \subset f^{-1}(f(A))$ が成り立つ。 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ とし、 $A = [0, 1]$ とおくと、

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1] \not\subseteq [0, 1]$$

となり、等号が成立しない。■