

解析学 I 解答例

2013.01.28

■ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$ がともに存在する場合に, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ がともに存在するかどうか調べ, ともに存在する場合には証明を与え, そうでない場合には反例をあげよ.

(解) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ をすべての自然数 n に対して $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$ と定義すると,

$$a_n + b_n = 0, \quad a_n b_n = -1, \quad n \in \mathbb{N}$$

より条件をみたすが, $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに振動して極限をもたない. ■