解析学 I　解答例

2013.01.09

■　$p > 1$ とし，$q > 1$ を $q = p/(p-1)$ により定める．また，任意の $r > 1$，$\mathbf{x} = (x_k) \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\|\mathbf{x}\|_r$ を

$$\|\mathbf{x}\|_r = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

により定める．このとき，任意の $\mathbf{x} = (x_k)$，$\mathbf{y} = (y_k) \in \mathbb{R}^n$ に対して，ヘルダーの不等式

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|\mathbf{x}\|_p \, \|\mathbf{y}\|_q$$

を用いて，ミンコフスキーの不等式

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$$

が成り立つことを示せ．

(解)　三角不等式 $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ より

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^p &= \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)\, |x_k + y_k|^{p-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} |x_k|\, |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k|\, |x_k + y_k|^{p-1}\end{aligned}$$

となり，ヘルダーの不等式より，上式第 1 項は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |x_k|\, |x_k + y_k|^{p-1} &\leq \|\mathbf{x}\|_p \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(|x_k + y_k|^{p-1} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} = \|\mathbf{x}\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|\mathbf{x}\|_p \left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^p \right)^{\frac{1}{q}} = \|\mathbf{x}\|_p \, \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^{\frac{p}{q}} = \|\mathbf{x}\|_p \, \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

となる．第 2 項についても同様の不等式が得られるので，

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^p \leq \|\mathbf{x}\|_p \, \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^{p-1} + \|\mathbf{y}\|_p \, \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^{p-1}$$

となり，

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$$

が成り立つ．■