解析学 I　解答例

2012.11.19

■　$x = 1/5$ とし，

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, x^{2\,k+1}}{2\,k+1}, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \, x^{2\,k+1}}{2\,k+1}$$

とおく．このとき，$|\,T - T_n\,| < 10^{-1000}$ をみたす自然数 n の値を評価せよ．必要があれば，$\log_{10} 2 = 0.301$ を用いてもよい．

(解)　$\log_{10} 2 = 0.301$ より $\log_{10} x = \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = -0.699$ であることに注意したい．三角不等式と無限等比級数の和の公式より

$$|\,T - T_n\,| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k \, x^{2\,k+1}}{2\,k+1} \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^{2\,k+1}}{2\,k+1} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^{2\,k+1}}{2\,n+3} \le \frac{x^{2\,n+3}}{2\,n+3} \cdot \frac{1}{1-r^2}$$

となる．$\ell = 2\,n+3$ とおくと，ℓ は

$$\frac{x^{\ell}}{\ell} \le 10^{-1000} \left(1 - x^2\right) \le 10^{-1000}, \qquad \text{つまり} \quad \ell \ge \frac{1000 - \log_{10} \ell}{0.699}$$

をみたせばよい．$\ell \ge 1000$ なら

$$\frac{1000 - \log_{10} \ell}{0.699} \le \frac{1000 - \log_{10} 1000}{0.699} = 1426.32\cdots$$

となるので，$\ell \ge 1427$，つまり，$n \ge 712$ である．■