

## 解析学 I 解答例

2012.10.09

■  $\mathbb{Q}$  の切断  $x = (A, B)$ ,  $y = (C, D)$  に対して, 順序関係  $\leq$  を

$$x \leq y \iff A \subset C$$

により定めるとき,  $\leq$  は全順序である, つまり, 任意の  $\mathbb{Q}$  の切断  $x, y$  に対して,  $x \leq y$  または  $y \leq x$  の何れかが成り立つことを示せ.

(解)  $\mathbb{Q}(r) = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x < r\}$  とする.  $x \leq y$  または  $x \not\leq y$  の何れかが成り立つので,  $x \not\leq y$  の場合について考える. 定義より  $A \not\subset C$  であるから, ある  $r \in \mathbb{Q}$  が存在して  $r \in A$  かつ  $r \notin C$  が成り立つ.  $r \notin C$  であるから, (D1) より  $r \in D$  である. (D2) より, すべての  $x \in B$  に対して  $r < x$ , つまり,  $B \subset \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}(r)$  が成り立ち, すべての  $x \in C$  に対して  $x < r$ , つまり,  $C \subset \mathbb{Q}(r)$  が成り立つ.  $B \subset \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}(r)$  と (D1) より

$$A = \mathbb{Q} \setminus B \supset \{\mathbb{Q} \setminus (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}(r))\} = \mathbb{Q}(r)$$

となり,  $C \subset \mathbb{Q}(r) \subset A$  である. 順序の定義より  $y \leq x$  である. ■