

解析学概論 解答例

2011.05.30

問題 集合 $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ 上に, 二項関係 \sim を

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

で定義するとき, 二項関係 \sim は同値関係であることを示せ.

(解) (i) $n + m = n + m$ と定義より $(n, m) \sim (n, m)$ である. (ii) $(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2)$ とする. 定義より $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$ であり, この等式において左辺と右辺を入れ替えると $n_2 + m_1 = n_1 + m_2$ が得られ, 定義より $(n_2, m_2) \sim (n_1, m_1)$ となる. (iii) $(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2)$, $(n_2, m_2) \sim (n_3, m_3)$ とする. 定義より $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$, $n_2 + m_3 = n_3 + m_2$ である. 交換法則と結合法則より

$$\begin{aligned} (n_1 + m_3) + (n_2 + m_2) &= (n_1 + m_2) + (n_2 + m_3) \\ &= (n_2 + m_1) + (n_3 + m_2) = (n_3 + m_1) + (n_2 + m_2) \end{aligned}$$

が得られ, 簡約法則より $n_1 + m_3 = n_3 + m_1$ が成り立つので, 定義より $(n_1, m_1) \sim (n_3, m_3)$ となる. したがって, 二項関係 \sim は同値関係である. ■