解析学概論　解答例

2011.05.16

問題　集合 $\mathbb{N}_0$ 上の二項関係 $\leq$ を

$$n \leq m \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{N}_0 \;\; (\Phi_k(n) = m)$$

で定義する．このとき，$\leq$ は $\mathbb{N}_0$ 上の（半）順序関係であることを示せ．

（解） (i) $\Phi_0(n) = n$ より $n \leq n$ である．(ii) $n \leq m$ かつ $m \leq n$ とする．定義より，ある $k \in \mathbb{N}_0$，$\ell \in \mathbb{N}_0$ が存在して，$\Phi_k(n) = m$ および $\Phi_\ell(m) = n$ が成り立つ．Φ_n が単射であることと

$$\Phi_n(0) \overset{(1)}{=} n = \Phi_\ell(\Phi_k(n)) \overset{\text{結合}}{=} \Phi_{\Phi_\ell(k)}(n) \overset{\text{交換}}{=} \Phi_n(\Phi_\ell(k))$$

より，$\Phi_\ell(k) = 0$ が得られる．命題

$$\Phi_\ell(k) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \ell = 0 \wedge k = 0$$

が成り立つことはすでに示されているので，$n = \Phi_0(m) = m$ となる．(iii) $n \leq m$ かつ $m \leq \ell$ とする．定義より，ある $k \in \mathbb{N}_0$，$j \in \mathbb{N}_0$ が存在して，$\Phi_k(n) = m$ および $\Phi_j(m) = \ell$ が成り立つ．$\Phi_j(k) \in \mathbb{N}_0$ と

$$\ell = \Phi_j(\Phi_k(n)) \overset{\text{結合}}{=} \Phi_{\Phi_j(k)}(n)$$

より，$n \leq \ell$ が得られる．■