

解析学概論 解答例

2011.05.02

問題 次の問いに答えよ.

(i) $(-1) \cdot (-1) = 1$ であることをできるだけ数学的に示せ.

(ii) $f(x) = x^2$ とし, $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$ をみたま \mathbb{R} の部分集合 A, B の例を示せ.

(解) (i) \mathbb{Z} は環であるから,

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + (-1) = 1 + 1 \cdot (-1) = 1 + (1 + 0) \cdot (-1) = 1 + \{1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)\} \\ &= 1 + \{(-1) + 0 \cdot (-1)\} = \{1 + (-1)\} + 0 \cdot (-1) = 0 + 0 \cdot (-1) = 0 \cdot (-1) \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0 = 1 + 0 \cdot (-1) = 1 + \{1 + (-1)\} \cdot (-1) = 1 + \{1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)\} \\ &= 1 + \{(-1) + (-1) \cdot (-1)\} = \{1 + (-1)\} + (-1) \cdot (-1) = 0 + (-1) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1) \end{aligned}$$

が得られる. (ii) $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0\}$ とおくと,

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{0\}, & f(A \cap B) &= \{0\}, \\ f(A) &= \{0, 1\}, & f(B) &= \{0, 1\}, & f(A) \cap f(B) &= \{0, 1\} \end{aligned}$$

より, $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$ がみたまされる. ■