

解析学概論 解答例

2011.04.25

問題 写像 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ に対して次を示せ.

- (i) $g \circ f$ が単射ならば f は単射である.
- (ii) $g \circ f$ が全射ならば g は全射である.

(解) (i) $f(x) = f(y)$ をみたす $x, y \in X$ を任意にとる. $g \circ f$ が単射であることと

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y)$$

より, $x = y$ が得られる. したがって, f は単射である. (ii) 任意に $z \in Z$ をとる. $g \circ f$ が全射であるから, $(g \circ f)(x) = z$ をみたす $x \in X$ が存在する. ここで $y = f(x)$ とおくと, $y \in Y$ であり,

$$z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$$

が成り立つ. したがって, g は全射である. ■