

解析学概論 解答例

2011.04.11

問題 二項関係 ρ を集合 X 上の同値関係とする．このとき，

$$a\rho b \iff C(a) = C(b)$$

が成り立つことを示せ．ここで，集合 $C(a)$ は同値関係 ρ による要素 a を代表元とする同値類である．

(解) (\Leftarrow): $a \in C(a)$ より $a \in C(b)$ であるから，同値類の定義より $a\rho b$ である．

(\Rightarrow): 任意の $x \in C(a)$ に対して， $a\rho b$ ， $x\rho a$ および同値関係の定義 (iii) より $x\rho b$ つまり $x \in C(b)$ が成り立つので， $C(a) \subset C(b)$ となる．また，任意の $x \in C(b)$ に対して， $a\rho b$ ， $x\rho b$ および同値関係の定義 (ii)，(iii) より $x\rho a$ つまり $x \in C(a)$ が成り立つので， $C(b) \subset C(a)$ となる．集合の相等の定義より $C(b) = C(a)$ である． ■