

解析学 II 解答例

2011.06.20

問題 原点を中心とする半径 1 の円周上を反時計回りに 1 周する閉曲線を C とする．すべての整数 n に対して，線積分

$$\int_C z^n dz$$

を求めよ．

(解) 閉曲線 C は $|z|=1$ と表されるので，変数変換 $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を用いると， $dz = ie^{i\theta} d\theta$ より

$$\int_C z^n dz = \int_{|z|=1} z^n dz = \int_0^{2\pi} (e^{i\theta})^n i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

となる．(a) $n = -1$ のとき

$$\int_C z^n dz = i \int_0^{2\pi} 1 d\theta = i 2\pi$$

である．(b) $n \neq -1$ のとき

$$\int_C z^n dz = i \left[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n+1} \{ e^{i(n+1)2\pi} - 1 \} = 0$$

である．■