

解析学 II 解答例

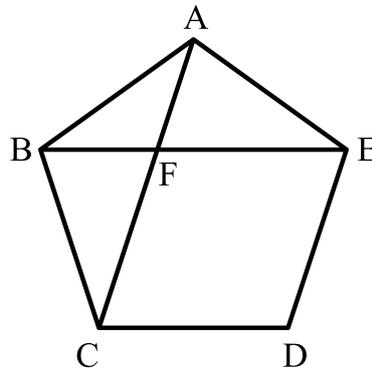
2011.06.06

問題 $\sin 72^\circ = z^2$ および $\cos 72^\circ$ の値を求めよ.

(解) 一辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE を考え, 対角線 AC と BE の交点を F とする. このとき,

$$\angle FAB = \angle FBA = \angle AEB = 36^\circ, \quad AB = AE = FE = 1, \quad FA = FB$$

である.



$\triangle ABE$ と $\triangle FAB$ は相似であるから, 辺 BF の長さを x とすると

$$1 : (x+1) = x : 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$

となり, $x \geq 0$ より

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

が得られる. したがって,

$$\cos 36^\circ = \frac{1+x}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad \sin 36^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

となる. また,

$$\cos 72^\circ = \cos^2 36^\circ - \sin^2 36^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \sin 72^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

である. ■