

● $X = t + t^{-1}$, $Y_n = t^n + t^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$) とする. このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, Y_n は X に関する n 次多項式であることを示せ.

(解答例) 数学的帰納法を用いて, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

(P) Y_n は X に関する n 次多項式, Y_{n+1} は X に関する $(n+1)$ 次多項式である,

ことを示す. [1] $Y_1 = X$, $Y_2 = (t + t^{-1})^2 - 2 = X^2 - 2$ より, $n = 1$ のとき (P) が成り立つ. [2] $n = k$ のとき, (P) が成り立つと仮定する. $Y_{k+1}X$ は X に関する $(k+2)$ 次多項式であり, Y_k は X に関する k 次多項式であるから,

$$Y_{k+2} = Y_{k+1}X - Y_k$$

は X に関する $(k+2)$ 次多項式である. したがって, $n = k+1$ のときも, (P) が成り立つ. 数学的帰納法により, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して (P) が成り立つ. つまり, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して Y_n は X に関する n 次多項式である.