●実数 (A,B)，(C,D) に対して二項関係 $\leq$ を

$$(A,B) \leq (C,D) \qquad \Longleftrightarrow \qquad D \subset B$$

で定義するとき，$\leq$ は $\mathbb{R}$ 上の順序関係であることを示せ.

（解答例） (i) $B \subset B$ と定義より，$(A,B) \leq (A,B)$ が成り立つ．(ii) $(A,B) \leq (C,D)$ かつ $(C,D) \leq (A,B)$ が成り立つとする．定義より $D \subset B$ かつ $B \subset D$ であるから，$B = D$ である．また，(A,B)，(C,D) は切断であるから，$A = \mathbb{Q} \setminus B = \mathbb{Q} \setminus D = C$ となり，$(A,B) = (C,D)$ が得られる．(iii) $(A,B) \leq (C,D)$ かつ $(C,D) \leq (E,F)$ が成り立つとする．定義より $D \subset B$ かつ $F \subset D$ であるから，$F \subset B$ である．定義より $(A,B) \leq (E,F)$ が成り立つ.

●任意の有理数 q_1，q_2 に対して

$$\mathbb{Q}_{q_1+q_2} = \{\, x + y \mid x \in \mathbb{Q}_{q_1},\ y \in \mathbb{Q}_{q_2} \,\}$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\mathbb{Q}_q = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x > q \,\}$ とする.

（解答例） $A = \{\, x + y \mid x \in \mathbb{Q}_{q_1},\ y \in \mathbb{Q}_{q_2} \,\}$ とおく．(i) 任意に $z \in A$ をとる．このとき，ある $x \in \mathbb{Q}_{q_1}$，$y \in \mathbb{Q}_{q_2}$ が取れて，$z = x + y$ と表せる．$x > q_1$，$y > q_2$ より $z > q_1 + q_2$ であるから，$z \in \mathbb{Q}_{q_1+q_2}$ である．したがって，$A \subset \mathbb{Q}_{q_1+q_2}$ が成り立つ．(ii) 任意に $z \in \mathbb{Q}_{q_1+q_2}$ をとる．$z > q_1 + q_2$ である.

$$r = \frac{z - (q_1 + q_2)}{2}, \qquad x = q_1 + r, \qquad y = q_2 + r$$

とおくと，$r > 0$，$r \in \mathbb{Q}$ より $x \in \mathbb{Q}_{q_1}$，$y \in \mathbb{Q}_{q_2}$ であり，

$$z = q_1 + q_2 + 2\,r = (q_1 + r) + (q_2 + r) = x + y \in A$$

が得られる．したがって，$\mathbb{Q}_{q_1+q_2} \subset A$ が成り立つ．以上のことから，$A = \mathbb{Q}_{q_1+q_2}$ である.