

●すべての自然数  $n, m$  に対して

$$\Phi_{S(m)}(n) = \Phi_m(S(n)) \quad (*)$$

が成り立つことを示せ.

(解答例)  $m$  を任意にとり固定する. [I]  $n = 0$  のとき,

$$(\text{左辺}) = \Phi_{S(m)}(0) \stackrel{\text{定義 (i)}}{=} S(m), \quad (\text{右辺}) = \Phi_m(S(0)) \stackrel{\text{定義 (ii)}}{=} S(\Phi_m(0)) \stackrel{\text{定義 (i)}}{=} S(m)$$

より, (\*) が成り立つ. [II]  $n = k$  のとき (\*) が成り立つと仮定する.

$$\Phi_{S(m)}(S(k)) \stackrel{\text{定義 (ii)}}{=} S(\Phi_{S(m)}(k)) \stackrel{\text{仮定}}{=} S(\Phi_m(S(k))) \stackrel{\text{定義 (ii)}}{=} \Phi_m(S(S(k)))$$

となり,  $n = S(k)$  のときも (\*) が成り立つ. 数学的帰納法より, すべての自然数  $n, m$  に対して (\*) が成り立つ.