

●命題

$$m \neq 0 \vee (m = 0 \wedge n \neq 0) \implies \Phi_n(m) \neq 0$$

の対偶をとることにより,

$$\Phi_n(m) = 0 \implies n = 0 \wedge m = 0 \quad (\text{P})$$

を示せ.

(解答例) 次の命題が成り立つことを示せばよい.

$$\neg(m \neq 0 \vee (m = 0 \wedge n \neq 0)) \equiv (n = 0 \wedge m = 0)$$

ド・モルガンの法則, 分配法則および, 命題  $Q \wedge \neg Q$  は恒偽であることより,

$$\begin{aligned} \neg(m \neq 0 \vee (m = 0 \wedge n \neq 0)) &\equiv (\neg(m \neq 0) \wedge \neg(m = 0 \wedge n \neq 0)) \\ &\equiv (\neg(m \neq 0) \wedge (\neg(m = 0) \vee \neg(n \neq 0))) \\ &\equiv (m = 0 \wedge (m \neq 0 \vee n = 0)) \\ &\equiv ((m = 0 \wedge m \neq 0) \vee (m = 0 \wedge n = 0)) \\ &\equiv (m = 0 \vee n = 0) \equiv (n = 0 \wedge m = 0) \end{aligned}$$

となり, 命題 (P) が成り立つ.