

●次で定義される同値関係 \sim について $C(x)$ を求めよ.

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

(解答例) $A = \{x + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ とおく. 任意の $y \in C(x)$ に対して, $k = y - x \in \mathbb{Z}$ であるから, $y = x + k \in A$ である. したがって, $C(x) \subset A$ が成り立つ. 逆に, 任意の $y \in A$ に対して, ある $k \in \mathbb{Z}$ を用いて $y = x + k$ と表され, $y - x = k \in \mathbb{Z}$ であるから, $y \in C(x)$ である. したがって, $A \subset C(x)$ が成り立つ. ゆえに, $C(x) = \{x + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ である.

●商集合 \mathbb{R}/\sim はどのようなものか?

(解答例) すべての $x \in [0, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$ に対して $C(x) = C(x + k)$ であるから, 区間 $[0, 1]$ の端点を同一視した円と考えることができ,

$$\mathbb{R}/\sim = \{C(x) \mid x \in [0, 1)\}$$

と表される.