

## 解析学 I (221700) 解答例

2011 年 1 月 12 日

$a, b$  を整数とする. 2 次方程式  $x^2 + ax + b = 0$  が有理数解をもてば, それは整数であることを示せ.

(解) 2 次方程式  $x^2 + ax + b = 0$  が有理数解  $\frac{q}{p}$  ( $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}$ ) をもつとする. 一般性を失うことなく,  $p$  と  $q$  は互いに素としてよい. 方程式に代入すると

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2 + a\left(\frac{q}{p}\right) + b = 0 \quad \iff \quad q^2 = -p(aq + bp)$$

が得られ,  $q^2$  が  $p$  の倍数である.  $q$  と  $p$  が互いに素であるから,  $q^2$  と  $p$  も互いに素である. したがって,  $p = 1$ , つまり, 有理数解は整数でなければならない. ■