

### 解析学3 課題 解答例

2020.11.24

1 次の問いに答えよ.

- (1) 弧度 (ラジアン) の定義を示せ.
- (2)  $\sin x$  ( $x$  の単位はラジアン) の (幾何学的な) 定義を示せ.

(解) (1) 半径  $r > 0$  の円において, 中心角  $\theta$  に対応する円弧の長さを  $x$  としたとき, 比  $x/r$  は  $r$  の値に関わらず一定であり, この性質を利用して角度の大きさ (弧度, 単位: ラジアン)  $\theta$  を  $\theta = x/r$  により定める. ただし, 反時計回りに測ったときの  $\theta$  は正であり, 時計回りに測ったときの  $\theta$  は負である. したがって, 弧度は単位円における円弧の長さ  $x$  である.

(2) 単位円  $x^2 + y^2 = 1$  を考え, 点  $(1, 0)$  を起点としたときの円弧の長さを  $\theta$  とする. 角度  $\theta$  ラジアンに対応する点は  $(\cos \theta, \sin \theta)$  と表される.  $y = 0$  から  $y = z \in [0, 1]$  までの曲線  $x = \sqrt{1 - y^2}$  長さは

$$F(z) = \int_0^z \sqrt{1 + \left\{ \frac{d}{dy} [\sqrt{1 - y^2}] \right\}^2} dy = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy$$

となるので,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  (第1象限の角) の場合には

$$\theta = F(\sin \theta)$$

をみます.  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  における  $\theta = F(z)$  の逆関数を  $z = \phi(\theta)$  とすると,  $0 \leq \theta \leq 2\theta$  に対して  $\sin \theta$  を

$$\sin \theta = \begin{cases} \phi(\theta) & (0 \leq \theta \leq \pi/2) \\ \phi(\pi - \theta) & (\pi/2 \leq \theta \leq \pi) \\ -\phi(\theta - \pi) & (\pi \leq \theta \leq 2\theta) \end{cases}$$

により定義する. また, 一般の  $\theta \in \mathbb{R}$  に対しては,  $\theta$  を  $\theta = 2\pi n + \psi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\psi \in [0, 2\pi)$ ) と表し,  $\sin \theta = \sin \psi$  により定義する. ■