解析学３　課題　解答例

2020.11.10

$\boxed{1}$　形式的な計算により

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{w^\ell}{\ell!}\right),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\,z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,z^{2\,n}}{(2\,n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,z^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}$$

が成り立つことを示せ.

(解) 二項定理より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k\,z^k\,w^{n-k}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right\}$$

となる．上記右辺では，第 1 象限（軸も含む.）において，直線 $k+\ell=n$ 上の格子点について和を取り，さらに n について和を取ることにより，第 1 象限（軸も含む.）上のすべての格子点について 1 回ずつ和を取っている．したがって，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^\ell}{\ell!}\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{w^\ell}{\ell!}\right)$$

となる．また，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\,z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\,z)^{2\,n}}{(2\,n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\,z)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,z^{2\,n}}{(2\,n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,z^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}$$

である．■