解析学３　課題　解答例

2020.10.20

$\boxed{1}$　$0<\gamma<1$，$\alpha\in\mathbb{R}$ とし，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_n=\alpha\,\gamma^{n-1},\qquad b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\qquad n=1,2,3,\cdots$$

により定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}$ は基本列であることを示せ．

(2) $\{b_n\}$ は基本列であるか否か調べよ．

(解) (1): (a) $\alpha=0$ ならば，任意の $\varepsilon>0$ に対して $|a_n-a_m|=0<\varepsilon$ より $\{a_n\}$ は基本列である．(b) $\alpha\neq 0$ の場合を考える．任意に $\varepsilon>0$ をとる．$n_0\in\mathbb{N}$ を

$$n_0=\left[\log_\gamma\frac{\varepsilon\,\gamma}{4\,|\alpha|}\right]+1$$

とおくと，

$$n_0\geq\log_\gamma\frac{\varepsilon\,\gamma}{4\,|\alpha|},\qquad つまり，\quad \gamma^{n_0}\leq\frac{\varepsilon\,\gamma}{4\,|\alpha|}$$

となる．任意の自然数 n，$m\geq n_0$ に対して

$$\begin{aligned}|a_n-a_m|&=|\alpha|\left|\gamma^{n-1}-\gamma^{m-1}\right|\leq\frac{|\alpha|}{\gamma}\left(\gamma^n+\gamma^m\right)\\&\leq\frac{2\,|\alpha|\,\gamma^{\min(n,m)}}{\gamma}\leq\frac{2\,|\alpha|\,\gamma^{n_0}}{\gamma}\leq\frac{2\,|\alpha|}{\gamma}\cdot\frac{\varepsilon\,\gamma}{4\,|\alpha|}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$\{a_n\}$ は基本列である．

(2): 等比数列の和の公式より

$$b_n=\frac{\alpha\,(1-\gamma^n)}{1-\gamma}=\frac{\alpha}{1-\gamma}+\frac{\alpha\,\gamma^n}{1-\gamma}$$

である．(a) $\alpha=0$ のときには，$b_n=\alpha/(1-\gamma)$ （$n\in\mathbb{N}$）であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して $|b_n-b_m|=0<\varepsilon$ より $\{b_n\}$ は基本列である．(b) $\alpha\neq 0$ の場合を考える．任意に $\varepsilon>0$ をとる．$n_0\in\mathbb{N}$ を

$$n_0=\left[\log_\gamma\frac{\varepsilon\,|1-\gamma|}{4\,|\alpha|}\right]+1$$

とおくと，

$$n_0\geq\log_\gamma\frac{\varepsilon\,|1-\gamma|}{4\,|\alpha|},\qquad つまり，\quad \gamma^{n_0}\leq\frac{\varepsilon\,|1-\gamma|}{4\,|\alpha|}$$

となる．任意の自然数 n，$m \geq n_0$ に対して

$$\begin{aligned}|b_n - b_m| &= \frac{|\alpha|}{|1-\gamma|}\,|\gamma^n - \gamma^m| \leq \frac{|\alpha|}{|1-\gamma|}\,(\gamma^n + \gamma^m) \\ &\leq \frac{2\,|\alpha|\,\gamma^{\min(n,m)}}{|1-\gamma|} \leq \frac{2\,|\alpha|\,\gamma^{n_0}}{|1-\gamma|} \leq \frac{2\,|\alpha|}{|1-\gamma|}\cdot\frac{\varepsilon\ |1-\gamma|}{4\,|\alpha|} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$\{b_n\}$ は基本列である． ■