

## 解析学概論 課題 解答例

2020.12.14

1 自然数の集合  $\mathbb{N}$  における二項関係  $|$  を

$$a|b \stackrel{\text{定義}}{\iff} b \text{ は } a \text{ で整除される}$$

により定めるとき, 二項関係  $|$  は  $\mathbb{N}$  における順序関係であることを示せ.

(解) (1)  $x = 1 \cdot x$  より  $x|x$  である. (2)  $x|y$  かつ  $y|x$  であると仮定する. 定義より, ある  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  が存在して,  $y = k_1 x, x = k_2 y$  が成り立つ.  $x = k_2 y = k_2 k_1 x$  と  $x > 0$  より  $k_1 k_2 = 1$  が得られ,  $k_1$  と  $k_2$  はともに自然数であるから,  $k_1 = k_2 = 1$  となる. したがって,  $x = 1 \cdot y = y$  である. (3)  $x|y$  かつ  $y|z$  であると仮定する. 定義より, ある  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  が存在して,  $y = k_1 x, z = k_2 y$  が成り立つ.  $z = k_2 y = k_2 k_1 x$  と  $k_2 k_1 \in \mathbb{N}$  より  $x|z$  である. 以上から, 二項関係  $|$  は  $\mathbb{N}$  における順序関係である. ■