解析学概論　課題　解答例

2020.12.07

$\boxed{1}$　次の問に答えよ．

(1) 高等学校における平面ベクトルの定義を述べよ．

(2) 平面ベクトルの定義を同値関係を用いて述べよ．

(解) (1) 高校数学の教科書「数学Ｂ」（数研出版）では次のように定義されている．

> 有向線分は位置と，向きおよび大きさで定まる．その位置を問題にしないで，向きと大きさだけで定まる量をベクトルという．

(2) 平面上の線分があるとき，一方の端点 (x_1, x_2) を始点，もう一方の端点 (y_1, y_2) を終点と区別したものを有向線分という．有向線分 (x_1, x_2, y_1, y_2) の全体を X と表し，X 上の二項関係 $\overset{R}{\sim}$ を

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \overset{R}{\sim} (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \quad \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad y_1 - x_1 = \tilde{y}_1 - \tilde{x}_1 \text{ かつ } y_2 - x_2 = \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2$$

により定める．(i) $y_1 - x_1 = y_1 - x_1$ かつ $y_2 - x_2 = y_2 - x_2$ より $(x_1, x_2, y_1, y_2) \overset{R}{\sim} (x_1, x_2, y_1, y_2)$ である．(ii) $(x_1, x_2, y_1, y_2) \overset{R}{\sim} (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ と仮定すると，$y_1 - x_1 = \tilde{y}_1 - \tilde{x}_1$ かつ $y_2 - x_2 = \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2$ が成り立つ．左辺と右辺を入れ換えて，$\tilde{y}_1 - \tilde{x}_1 = y_1 - x_1$ かつ $\tilde{y}_2 - \tilde{x}_2 = y_2 - x_2$ となり，定義より $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \overset{R}{\sim} (x_1, x_2, y_1, y_2)$ である．(iii) $(x_1, x_2, y_1, y_2) \overset{R}{\sim} (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ かつ $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \overset{R}{\sim} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_1, \hat{y}_2)$ と仮定すると，

$$y_1 - x_1 = \tilde{y}_1 - \tilde{x}_1, \quad y_2 - x_2 = \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2, \quad \tilde{y}_1 - \tilde{x}_1 = \hat{y}_1 - \hat{x}_1, \quad \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2 = \hat{y}_2 - \hat{x}_2$$

が成り立つ．

$$y_1 - x_1 = \tilde{y}_1 - \tilde{x}_1 = \hat{y}_1 - \hat{x}_1, \quad y_2 - x_2 = \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2 = \hat{y}_2 - \hat{x}_2$$

より $(x_1, x_2, y_1, y_2) \overset{R}{\sim} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_1, \hat{y}_2)$ となる．以上から，二項関係 $\overset{R}{\sim}$ は X における同値関係である．この関係により得られる同値類が平面ベクトルに対応する．■