解析学概論　課題　解答例

2020.11.30

$\boxed{1}$　自然数 n に対して $A_n = [1/n, 3-1/n]$ とおく．このとき，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k, \qquad C_n = \bigcap_{k \geq n} A_k$$

を調べ，

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right), \qquad C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right)$$

を求めよ．

(解) $\{A_n\}$ はすべての自然数 $n \leq k$ に対して $A_n \subset A_k \subset (0,3)$ をみたすので，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $B_n \subset (0,3)$，$C_n = A_n$ が成り立つ．$n \in \mathbb{N}$，$x \in (0,3)$ を任意に取る．

$$k \geq \max\left\{ n, \frac{1}{\min(x, 3-x)} \right\}$$

をみたす $k \in \mathbb{N}$ を取ると，$k \geq n$，$x \in A_k$ であるから，$x \in B_n$ が成り立つ，つまり $(0,3) \subset B_n$ である．したがって，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $B_n = (0,3)$ となり，

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0,3) = (0,3)$$

である．また，

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = B_1 = (0,3)$$

となる．■